

Title	Boole代数ノ公理系（Ⅰ）
Author(s)	上中, 雪子
Citation	全国紙上数学談話会. 2(14) p.486-p.492
Issue Date	1949-05-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75280
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

146. Boole 代数ノ公理系 (I)

上 中 雪 子 (1949. I. 13)

§ 1. 問題ノ説明 「Boole 環⁽¹⁾」ハ又「一般 Boole 代数⁽²⁾」トモ名附ケラレ 之ヲ定義スル種々ノ公理系ガ *Stone*⁽³⁾ *Stabler*⁽⁴⁾ 及ビ *Bernstein*⁽⁵⁾ 等ニヨツテ興ヘラレテ居ル。ソシテカハル公理系ノ何レニ於イテモ乗法ノ結合法則 (*Associative law of Multiplication*) ガ特殊ノ役割ヲ演ジテキル。私ハコノ公理ヲ更ニ弱イニツノ公理デ、併セテ之ト同値トナルモノニ分解シ ソレ等ノ独立性ヲ考究シテ見タイ。コノデハ代表的ナ公理系トシテ *Stabler* ノ *Set II*⁽⁴⁾ ヲ取り上げヨウ。ソレハ以下ニ述ベル様ナモノデアル。

Boole 環 A ヲ規定スル *Stabler* ノ公理系 *Set II*.

集合 A ハ空デナク、ソノ要素ノ間ニハ $+$ 及ビ \times ノ算法ガ定義サルル。

1. $a, b \in A$ ナラバ $\begin{cases} (i) & a + b \in A \\ (ii) & ab \in A \end{cases}$ 一意ニ定ムル。

(注意: 算法ノ記号 \times ハ略シテ \cdot ヲ全ク省略シテシマフノガ通例デアル)

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + b_1 = a + b_2$ ナラバ $b_1 = b_2$
4. $a_1 + b = a_2 + b$ ナラバ $a_1 = a_2$

5. $(a\delta)c = a(\delta c)$
6. $a(\delta + c) = a\delta + ac$
7. $(a + \delta)c = ac + \delta c$
8. $aa = a$

コノ公理系ノ公理ノ中、公理5ガ如何ニ特殊ノ役割ヲ演ズルカハ コノ公理系カラ
5ヲ除イタテリ1, 2, 3, 4, 6, 7, 8カラ次ノ結果ガ得ラレル事カラモ窺ヒ知ル
事ガ出来ル。

T4. $a + 0 = 0 + a = a$ ナル 0 ガ存在シ且 $-$ ツニ限ル。

D2. $a + a = 0$

C1. $a + \delta = c$ ナラバ $a = c + \delta$

C2. $a + \delta = 0$ ナラバ $a = \delta$

T5. $a, \delta \in A$ ニ対シテ $x + a = \delta$ $x \in A$ ナル x 存在
シテ $-$ ニ定マル。且 $x = \delta + a$ デアル。

T6. $a + \delta = \delta + a$

T7. $a\delta = \delta a$.

T8. $a0 = 0a = 0$

之等ノ定理ノ證明ハ *Stabler*⁽⁴⁾ 及ビ *Bernstein*⁽⁵⁾ ガ與ヘテ居ル。

T4, D2 等定理ノ名称ハ *Stabler* ノ論文⁽⁴⁾ニ示シテアルモノヲ採用シタ。

以下私ハ之等ノ結果ヲ多クノ場合斷リ無シニ用ヒル。

私ハ先ツ5ノ代リニ次ノ二ツノ公理ヲ導入シテ見タ。

5₁. 任意ノ $a, \delta \in A$ 且 $a \neq \delta$ ニ対シ $C^*a = a$, $C^*\delta = \delta$
ヲ同時ニ満足スル $C^* \in A$ ノ存在 但シ $C^* = C^*(a, \delta)$

5₂. 任意ノ $a, \delta \in A$ 且 $a \neq 0$, $\delta \neq 0$ ニ対シ $a\delta = 0$ ナラバ、
任意ノ $c \in A$ ニ対シ $a(\delta c) = 0$.

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8ナル七個ノ公理ノ下ニ5カラ5₁ 及ビ5₂ガ導キ出シ得ル
事ハ *trivial* デアル。實際5₁ヲ証明スルニハ $C^* = a + \delta + a\delta$ ト
セケバ $C^*a = (a + \delta + a\delta)a = aa + \delta a + (a\delta)a = a + (a\delta + a\delta)$
 $= a + 0 = a$ 。同様ニ $C^*\delta = \delta$ トナル。5₂ハT8カラ明カデアル。

依ッテ問題ハ上段ノ七個ノ公理ノ下ニ5₁, 5₂カラ5ヲ導ク事及ビ5₁, 5₂ガ

が互に且他ノヒ制ノ公理トモ独立ナル事ヲ示ス点ニ在ル。

§2. 乗法ノ結合法則ノ分解

定理 上記ノヒ制ノ公理ノ下ニ公理5ハ公理5₁, 5₂ノ二公理ヲ用ヒテ
モノニ同値ナル。

公理5₁, 5₂ カラ公理5ヲ導ク。以下ニ、示ハニツノ証明ヲ與ヘル。

第一証明。今 a, b ヲ A ノ任意ノ二ツノ要素トシヨウ。5₁ = ヨリ $C^* \in A$ 存在シテ $C^*a = a$, $C^*b = b$ トナル。ソコデ $a^* = C^* + a$ トオケバ $aa^* = a(C^* + a) = aC^* + aa = a + a = 0$ 即チ $aa^* = 0$ 。從ツテ5₂ = ヨリ $0 = a(a^*b) = a\{(C^* + a)b\} = a(C^*b + ab) = a(b + ab) = ab + a(ab)$ 。

故ニ (1) $ab = a(ab)$ 從ツテ M_2 , $(aa)b = a(ab)$ 。

M_2 ハ *Bernstein*⁽⁵⁾ノ與ヘタ條件ナル。Bernsteinハ之カラ次ノ推ニシテ $(ab)c = a(bc)$ ヲ導キ出シタ。先ヅ任意ノ a, b = 既シテ次ノ (2) が成立スル。

$$(2) \quad (a+b)(ab) = 0$$

$$\begin{aligned} (a+b)(ab) &= a(ab) + b(ab) = ab + b(ba) = ab + ab^2 \\ &= 0 \quad (7, \{(1), T7\}) \end{aligned}$$

$\{(1), T7\}$, $D2$ = 依リ)。

$$\begin{aligned} \text{ソコデ } 0 &= \{(a+b) + (b+c)\} \{(a+b)(b+c)\} = (a+c) \{(a+b)(b+c)\} \\ &= (a+c) \{a(b+c) + b(b+c)\} = (a+c) \{(ab+ac) + (bb+bc)\} \\ &= a \{(ab+ac) + (b+bc)\} + c \{(ab+ac) + (b+bc)\} \\ &= [\{a(ab) + a(ac)\} + \{ab + a(bc)\}] + [\{c(ab) + c(ac)\} + \{cb + c(bc)\}] \\ &= \{(ab+ac) + \{ab + a(bc)\}\} + \{(ab)c + ac\} + \{bc + bc\} = a(bc) + (ab)c \end{aligned}$$

(2), $\{2, D2, T4\}$, 7, 6, $\{7, 8\}$, 6, $\{(1), T7\}$ $\{2, D2, T4\}$ = 依リ)

$$\therefore (ab)c = a(bc) \quad (C2 = \text{依リ})$$

第二証明。 $ab = b$ ヲ $a \geq b$ ト定義スレバ次ノ (i) 及び (ii) ハ 8 及ビ $T7$ カラ明カナル。

$$(i) \quad a \geq aa, \quad (ii) \quad a \geq b \quad \text{且} \quad b \geq a \quad \text{トシバ} \quad a = b.$$

Lemma 1. $a \geq b$ ナラバ、任意ノ $C =$ 対シ $a \geq bc$ デアル。

証明 $5_1 =$ ヨリ $b, C =$ 対シ $C^*b = b, C^*(bC) = bC$ ナル C^* 存在スル。ソコデ $\lambda = C^* + a$ トオケバ $\lambda b = (C^* + a)b = C^*b + ab = b + b = 0$ 即チ $\lambda b = 0$ 。従ツテ $5_2 =$ ヨリ $\lambda(bc) = 0 \quad \therefore a(bc) = (C^* + \lambda)bc = C^*(bc) + \lambda(bc) = bc + 0 = bc$ 。即チ $a \geq bc$ 。

系。 凡テノ $a, b =$ ツイテ $a \geq ab$ 。

証明 (i) $a \geq a$ ト **Lemma 1** カラ明カデアル。

Lemma 2 $a \geq b$ ナラバ、任意ノ $C =$ 対シ $aC \geq bc$ デアル。

証明。 $5_1 =$ ヨリ $b, C =$ 対シ $C^{**}b = b, C^{**}C = C$ ナル C^{**} 存在スル。ソコデ $\beta = C^{**} + a$ トオケバ $\beta b = (C^{**} + a)b = C^{**}b + ab = b + b = 0$ 即チ $\beta b = 0$ 。従ツテ $5_2 =$ ヨリ $\beta(bc) = 0$ 。更ニ $(bc)\beta = 0 = 5_2$ フ適用スレバ、 $0 = (bc)(\beta C) = (bc)\{C^{**} + a\}C = (bc)(C^{**}C + aC) = (bc)(C + aC) = (bc)C + (bc)(aC)$ 。

Lemma 1, 系 = ヨリ $bc + (aC)(bc) = 0$ 即チ $(aC)(bc) = bc$ 定義 = ヨリ $aC \geq bc$ 。

極限法ノ associative law: 凡テノ $a, b, C =$ ツイテ $(ab)C = a\{a(b)C\}$ ナル事ヲ示サウ。

先ヅ **Lemma 1, 系** = ヨリ $a \geq ab$, **Lemma 1** = ヨリ $a \geq (ab)C$, **Lemma 2** = ヨリ $a(bc) \geq \{(ab)C\}(bc)$ 。他方 = 於テ **Lemma 1, 系** = ヨリ、 $b \geq ab$, **Lemma 2** = ヨリ $bc \geq (ab)C$ 。定義 = ヨリ $\{(ab)C\}(bc) = (ab)C$ 従ツテ $a(bc) \geq (ab)C$, a ト C トヲ取換ヘレバ $(ab)C \geq a(bc)$ 。最後ニ、(ii) = ヨリ、 $(ab)C = a(bc)$ デアル。

§3. 公理系ノ独立性。 次ニ私ハ 1, 2, 3, 4, 5₁, 5₂, 6, 7, 8 ノ九個ノ公理ガ 2 = 独立デアル事ヲ示シタイノデアルガ、他ノ場合ハ既ニ知レテ居ル⁽²⁾ノ事問題トナツテ居ル 5₁, 5₂ = 就テ述べヨウ。

例 1. 5₂ ガ他ノ七個ノ公理ト共ニ成立シ、5₁ ガ不成立デアルコト

平面上ノ平行二直線 ℓ 及 ℓ' トノ点ノ全体ヲ A^* トシ、 A^* 以外ノ点ハ空集合トシテ取り扱フ。 α, β, γ 等ハ ℓ 及 ℓ' 即チ A^* トノ有限個ノ点集合ヲ表ハシ、 \emptyset ハ空集合ヲ表ハスモノトスル。

$\alpha + \beta$: α ト β トノ Symmetric difference.

特ニ α ト β トノ凡テノ点ガ相重ナル 即チ $\alpha = \beta$ トルトキ、 $\alpha + \alpha = \emptyset$ ト定義スル。

$\alpha \cdot \beta$: α ヲ m (≥ 1) 個ノ点集合、 β ヲ n (≥ 1) 個ノ点集合トシテ α ト β トカラ各一点ヲトッテ作ッタ mn 個ノ点対ヲ両端トスル線分ノ中点ヲ C_i ($i=1, 2, 3, \dots, mn$) トシ $\alpha \cdot \beta = \{C_1\} + \{C_2\} + \{C_3\} + \dots + \{C_{mn}\}$ ト定義スル。但シ $\{C_i\}$ ハ一点 C_i ヲ集合ト見做シタモノヲ示ス。

1, 2, 3 及ビ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 等ノ成立ハ明カデアル。従ッテ 4 ノ成立ハ自ヅト明カデアル。

6 ノ成立 : β ト γ トガ互ニ相素ナラザルトキソノ共通部分ヲ α デ表ハシ、 n_α 個ノ点集合トスレバ、 $\alpha \beta + \alpha \gamma =$ 於テハ $\alpha \beta, \alpha \gamma$ ノ夫々ニ於ケル α ト α トノ各一点ヲトッテ作ッタ $m n_\alpha$ 個ノ点対カラ出来ル中点ハ同一ノモノガ二ツ宛デアルカラ現ハレナイ。ソノ他ノ点ハ α ト α ニ含まレナイ β トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ $m(n_\beta - n_\alpha)$ 個ノ点対カラ出来ル中点及ビ α ト α ニ含まレナイ γ トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ $m(n_\gamma - n_\alpha)$ 個ノ点対カラ出来ル中点ヲ加ヘ合セタモノデアル。之ヲノ点ハ α ト β ノミカ γ ノミニ属シ、 α ノ点ヲ含まナイ点集合 $\beta + \gamma$ トカラ各一点ヲトッテ作ッタ $m\{(n_\beta - n_\alpha) + (n_\gamma - n_\alpha)\}$ 個ノ点対カラ出来ル中点ト一致スル。即チ $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ガ成立スル。

尚 β ト γ トガ互ニ相素ナルトキ成立スルコトハ自ヅト明カデアル。
又 $\alpha \cdot \emptyset = \emptyset$ ガ成立スルコトハ明カデアル。従ッテ、成立ハ自ヅト明カデアル。

8 ノ成立 : $\alpha = \beta$ ナル場合ノ $\alpha \beta$ ハ α ト β トカラノ各一点ヲトッテ作ッタ $m n$ 個ノ点対ノ中、同一ノ点ガトラレバ中点ハ之ト一致シ、相異なる点ガ取ラレバ C_i ノ中ニ同一ノモノガ二ツ宛現ハレルカラ $\alpha \beta$ ノ中ニ現ハレナイ。依ッテ $\alpha \beta$ ハ α ト一致スル。即チ $\alpha \alpha = \alpha$ ガ成立スル。

5₂ ノ成立 : α ヲ ℓ 上ノ任意ノ集合、 β ヲ ℓ' 上ノ任意ノ集合トスレバ α, β カラノ各一点ヲ取ッテ作ッタ線分ノ中点ハ ℓ ト ℓ' トノ距離ノ中点ノ軌跡上ノ点デアルカラ $A^* =$ 属サナイ。依ッテ $\alpha \beta$ ノ凡テノ点ハ $A^* =$ 属サナイ。

即ち $\alpha\beta = 0$ デアル。ソコデ A^* = 於ケル任意ノ集合 C ヲトリ $\alpha(\beta C)$ ヲ考ヘルニ C ノ点デ β カモ β 上ニアル点ト β' 上ニアル点ノ点トニヨツテ作ラレル線分ノ中点ハ β 上ト同ク理由ノ下ニ A^* = 於ケル。地方 C ノ点デ β カモ β' 上ニアルモノト β 上ノ点トニヨツテ作ラレル線分ハ β' 上ニアル故。ソノ中点モ亦 β' 上ニアル。従ツテ βC ハ結局ノトヨコ空カ β' 上ノ点集合デアル。依ツテ $\alpha(\beta C) = 0$ トナル事ハ何レノ場合ニモ成立スル。即チ $\alpha\beta = 0$ ナラバ任意ノ $C \in A^*$ = 於シ $\alpha(\beta C) = 0$ デアル。

5. 不成立：例ヘバ Q ヲ β 上ノ二点 Q_1, Q_2 トカラ成ル集合、 β ハ β 上ノ点 α ト β' 上ノ点 β トノ二点カラ成ル集合トシ、 $C^* \alpha$ ハコレラ Q_1, Q_2 反ビ β ノ三点カラ成ル集合トスレバ、 $C^* \alpha$ = 於テハ β 上ノミノ点トニヨル中点ハ β = ヨリ Q_1, Q_2 ノミ現ハレ。点対 (Q_i, β) , $i=1, 2$ ニヨル中点ハ S_2 = 於ケル理由ノ下ニ β デアル。依ツテ $C^* \alpha$ ノ中ニハ Q_1, Q_2 ノミ現ハレル。即チ $C^* \alpha = \alpha$ デアル。他方 $C^* \beta$ = 於テハ、 Q_1 、点対 (Q_2, Q_1) ニヨル中点 反ビ β ガ現ハレル。従ツテ $C^* \beta \neq \beta$ デアル。

例2. 5.1 ガ 他ノ七個ノ公理ト共ニ成立シ、5.2 ガ不成立デアルコト

+	0	1	α	β	C	A	B	Γ
0	0	1	α	β	C	A	B	Γ
1	1	0	A	B	I	α	β	C
α	α	A	0	Γ	B	I	C	β
β	β	B	Γ	0	A	C	I	α
C	C	Γ	B	A	0	β	α	I
A	A	α	I	C	β	0	Γ	B
B	B	β	C	I	α	Γ	0	A
Γ	Γ	C	β	α	I	B	A	0

X	0	1	α	β	C	A	B	Γ
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	β	C	A	B	Γ
α	α	α	α	I	I	0	A	A
β	β	β	I	β	I	B	0	B
C	0	C	I	I	C	Γ	Γ	0
A	0	A	0	B	Γ	A	Γ	B
B	0	B	A	0	Γ	Γ	B	A
Γ	0	Γ	A	B	0	B	A	Γ

ココニ於テハ C^* トシテハ凡テノ要素ニ就テ $I\alpha = \alpha$ ガ成立スルヲ採用シタ。5.1 ノ成立ト共ニ 他ノ七個ノ公理ハ成立スル。

5.2 ノ不成立：例ヘバ $\alpha A = 0$ ナルニカハラス $\alpha(A\beta) = \alpha B = A \neq 0$ デアル。

註 (1). 例へば G. Birkhoff, "Lattice theory" (The American Mathematical Society. Colloquium Publications vol. xxv, 1940) pp 95-96 参照.

(2). 例へば G. Birkhoff, "Lattice theory" p 97 参照.

(3). M.H. Stone, "The theory of representations for Boolean algebras" (Transactions of the American Mathematical Society vol. 40, 1941) 参照.

(4). E.R. Stabler, "Sets of postulates for Boolean rings" (The American Mathematical Monthly, vol. 48, 1941) 参照.

(5). B.A. Bernstein, "Postulate-sets for Boolean rings" (Transactions of the American Mathematical Society vol. 55, 1943) 参照.